

7045

GABRIELA KOHR  
PETRU T. MOCANU

CAPITOLE  
SPECIALE DE  
ANALIZĂ  
COMPLEXĂ

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

**GABRIELA KOHR**

**PETRU T. MOCANU**

**Membru Corespondent al  
Academiei Române**

# **Capitole Speciale de Analiză Complexă**

---

**Presa Universitară Clujeană**

**Cluj-Napoca, 2005**

# Cuprins

Prefață	9
<b>1 Olomorfie și Integrabilitate în Planul Complex. Rezultate Fundamentale</b>	<b>11</b>
1.1 Funcții olomorfe. Generalități	11
1.1.1 Notății și rezultate preliminare	11
1.1.2 Funcții elementare	16
1.1.3 Șiruri și serii de funcții olomorfe	18
1.1.4 Zerourile funcțiilor olomorfe	20
1.1.5 Teorema maximului modulului pentru funcții olomorfe. Lema lui Schwarz	21
1.2 Integrala complexă (Cauchy)	22
1.2.1 Drumuri în planul complex	22
1.2.2 Generalități asupra integralei Cauchy	25
1.2.3 Serii Laurent	28
<b>2 Teoria Indexului. Aplicații</b>	<b>31</b>
2.1 Ramuri uniforme	31
2.2 Index. Aplicații	38
2.2.1 Index	38
2.2.2 Lanțuri în $\mathbb{C}$ . Noțiunea de omologie	45
2.3 Integrale Cauchy. Teoria reziduurilor	47
2.3.1 Aplicații ale noțiunii de index	47
2.3.2 Puncte singulare izolate	49
2.4 Zerourile și polii funcțiilor meromorfe	55
2.5 Aplicații ale Teoremei lui Rouché	69
2.6 Aplicații ale Teoremei reziduurilor la calculul unor integrale definite reale	73
2.6.1 Integrale de tipul $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx$ și $\int_0^{\infty} R(x)dx$	74

2.6.2	Integrale trigonometrice . . . . .	79
2.6.3	Integrale de tip Fourier . . . . .	81
2.6.4	Integrale de tipul $\int_0^{\infty} R(x) \ln x dx$ și $\int_0^{\infty} [R(x)/x^a] dx$ . .	85
2.6.5	Alte tipuri de integrale care se pot calcula cu Teorema reziduurilor . . . . .	88
2.7	Alte aplicații ale Teoremei reziduurilor . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Normalitate și Compactitate în Spațiul Funcțiilor Olomorfe</b>	<b>101</b>
3.1	Structura metrică și topologică a spațiului $H(\Omega)$ . . . . .	101
3.2	Teoremele lui Montel și Vitali . . . . .	107
3.3	Probleme extremale . . . . .	116
3.4	Normalitate și compactitate în spațiul funcțiilor meromorfe . .	118
<b>4</b>	<b>Funcții Univalente</b>	<b>123</b>
4.1	Noțiuni și rezultate generale privind funcțiile univalente . . . .	123
4.2	Clasa $S$ . Proprietăți . . . . .	133
4.3	Convergența în nucleu . . . . .	145
4.4	Metrica hiperbolică pe discul unitate. Aplicații . . . . .	153
<b>5</b>	<b>Reprezentări Conforme</b>	<b>161</b>
5.1	Domenii simplu conexe și reprezentări conforme . . . . .	161
5.1.1	Teorema fundamentală a reprezentărilor conforme . . .	161
5.1.2	Automorfisme și reprezentări conforme ale domeniilor simplu conexe în $\mathbb{C}$ . . . . .	168
5.2	Automorfisme conforme ale coroanelor circulare și domeniilor dublu conexe . . . . .	175
5.3	Automorfisme și reprezentări conforme ale domeniilor mărginite, din $\mathbb{C}$ . . . . .	181
<b>6</b>	<b>Funcții Armonice și Funcții Subarmonice</b>	<b>187</b>
6.1	Funcții armonice . . . . .	187
6.1.1	Proprietăți elementare ale funcțiilor armonice . . . . .	188
6.1.2	Formula integrală a lui Poisson și Teorema lui Harnack . . . . .	195
6.1.3	Proprietatea valorii medii pentru funcții armonice . . . . .	203
6.1.4	Principiul simetriei lui Schwarz . . . . .	205
6.1.5	Formula lui Poisson pentru funcții olomorfe cu partea reală pozitivă . . . . .	210
6.2	Funcții subarmonice . . . . .	213
6.2.1	Proprietăți elementare ale funcțiilor subarmonice . . . . .	215
6.2.2	Proprietatea subvalorii medii. Aplicații . . . . .	218

<b>7</b>	<b>Funcții Întregi și Funcții Meromorfe</b>	<b>227</b>
7.1	Funcții meromorfe. Teorema lui Mittag-Leffler . . . . .	227
7.2	Funcții întregi. Teorema lui Weierstrass . . . . .	239
7.2.1	Produce infinite de numere complexe . . . . .	239
7.2.2	Funcții întregi și produse de factori canonici. Teorema lui Weierstrass . . . . .	246
7.3	Domenii de olomorfie în $\mathbb{C}$ . . . . .	253
	<b>Bibliografie</b>	<b>259</b>
	<b>Index</b>	<b>265</b>