

5802

Walter Rudin

2^e CYCLE • AGRÉGATION

Analyse réelle et complexe

Cours et exercices

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx &= \|f\|_{p, \mathbb{R}}^p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_k}} \|f\|_{p, \mathbb{R}}^p (2S_k + 2)^{p/2} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{M_k}} \|f\|_{p, \mathbb{R}}^p &\leq \|f\|_{p, \mathbb{R}}^p \\ \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{-2\pi i k}} &= e^{2\pi i} \prod_{k=1}^{\infty} \cos \pi i k \end{aligned}$$

3^e édition

DUNOD

Analyse réelle et complexe

Cours et exercices

Walter Rudin

Professeur à l'université du Wisconsin (Madison)

Traduit de l'américain par

Jean Dhombres

Professeur à l'université de Nantes

DUNOD

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE.....	XI
AVERTISSEMENT	XIII
PROLOGUE. — <i>La fonction exponentielle</i>	1
CHAPITRE PREMIER. — <i>Théorie abstraite de l'intégration</i>	5
Notations de la théorie des ensembles et terminologie.....	6
Notion de mesurabilité.....	7
Fonctions étagées	14
Propriétés élémentaires des mesures	15
Arithmétique dans $[0, \infty]$	17
Intégration de fonctions positives.....	18
Intégration de fonctions complexes.....	22
Rôle des ensembles de mesure nulle.....	25
Exercices	29
Notes historiques et textes choisis.....	31
CHAPITRE 2. — <i>Mesures positives de Borel</i>	43
Espaces vectoriels	43
Preliminaires topologiques.....	45
Théorème de représentation de Riesz.....	50
Propriétés de régularité des mesures de Borel	56
Mesure de Lebesgue	58
Propriétés de continuité des fonctions mesurables.....	63
Exercices	65
Notes historiques et textes choisis.....	69
CHAPITRE 3. — <i>Espaces L^p</i>	77
Fonctions convexes et inégalités	77
Espaces L^p	80
Approximation par des fonctions continues.....	84
Exercices	85
Notes historiques et textes choisis.....	90
CHAPITRE 4. — <i>Théorie élémentaire des espaces de Hilbert</i>	99
Produits scalaires et formes linéaires	99
Systèmes orthonormaux.....	104

Séries trigonométriques.....	109
Exercices.....	113
Notes historiques et textes choisis	116
CHAPITRE 5. — <i>Exemples des techniques d'utilisation des espaces de Banach</i>	125
Espaces de Banach.....	125
Conséquences du théorème de Baire.....	126
Séries de Fourier de fonctions continues.....	130
Coefficients de Fourier des fonctions de L^1	132
Le théorème de Hahn-Banach.....	133
Une approche abstraite de l'intégrale de Poisson.....	136
Exercices.....	139
Notes historiques et textes choisis	143
CHAPITRE 6. — <i>Mesures complexes</i>	149
Variation totale.....	149
Absolue continuité.....	152
Conséquences du théorème de Radon-Nikodym.....	156
Formes linéaires bornées sur L^p	158
Théorème de représentation de Riesz.....	160
Exercices.....	163
Notes historiques.....	165
CHAPITRE 7. — <i>Différentiation</i>	169
Dérivées des mesures.....	169
Théorème fondamental du calcul.....	177
Applications différentiables	182
Exercices.....	187
Notes historiques et textes choisis	191
CHAPITRE 8. — <i>Intégration sur les espaces produits</i>	199
Mesurabilité sur les produits cartésiens.....	199
Mesure produit	201
Théorème de Fubini	202
Complétion d'une mesure produit	205
Convolution	207
Fonctions de répartition	209
Exercices.....	211
Notes historiques et textes choisis	215
CHAPITRE 9. — <i>La transformation de Fourier</i>	219
Propriétés formelles.....	219
Le théorème d'inversion	221
Le théorème de Plancherel.....	225
L'algèbre de Banach L^1	229
Exercices.....	232
Notes historiques et textes choisis	235
CHAPITRE 10. — <i>Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes</i>	241
Différentiation complexe.....	241

Intégration sur des chemins	245
Le théorème local de Cauchy	248
La représentation en série entière	251
Le théorème de l'image ouverte	256
Le théorème global de Cauchy	259
Le calcul des résidus	265
Exercices	268
Notes historiques	272
CHAPITRE 11. — Fonctions harmoniques	275
Les équations de Cauchy-Riemann	275
L'intégrale de Poisson	276
La propriété de la moyenne	280
Le comportement à la frontière des intégrales de Poisson	281
Théorèmes de représentation	286
Exercices	290
Notes historiques et textes choisis	294
CHAPITRE 12. — Le principe du maximum	297
Introduction	297
Lemme de Schwarz	297
La méthode de Phragmen-Lindelöf	299
Un théorème d'interpolation	303
Une réciproque du théorème du maximum	305
Exercices	306
Notes historiques	308
CHAPITRE 13. — Approximation par des fonctions rationnelles	310
Préparation	310
Le théorème de Runge	313
Le théorème de Mittag-Leffler	315
Domaines simplement connexes	316
Exercices	318
Notes historiques et textes choisis	320
CHAPITRE 14. — Représentation conforme	326
Conservation des angles	326
Homographies	327
Familles normales	329
Le théorème de l'application conforme de Riemann	330
La classe $\mathcal{S}$	332
Continuité à la frontière	335
Image conforme d'une couronne	337
Exercices	338
Notes historiques et textes choisis	344
CHAPITRE 15. — Zéros des fonctions holomorphes	348
Produits infinis	348
Le théorème de factorisation de Weierstrass	351
Un théorème d'interpolation	354

Formule de Jensen.....	356
Produits de Blaschke.....	358
Le théorème de Müntz-Szasz.....	361
Exercices.....	363
Notes historiques.....	367
CHAPITRE 16. — <i>Le prolongement analytique</i>	369
Points réguliers et points singuliers.....	369
Prolongement le long d'une courbe.....	372
Le théorème de monodromie.....	375
Construction d'une fonction modulaire.....	376
Le théorème de Picard.....	379
Exercices.....	380
Notes historiques.....	383
CHAPITRE 17. — <i>Espaces H^p</i>	385
Fonctions sous-harmoniques.....	385
Les espaces H^p et N	387
Théorème de F. et M. Riesz.....	390
Théorèmes de factorisation.....	391
L'opérateur de déplacement.....	395
Fonctions conjuguées.....	398
Exercices.....	400
Notes historiques.....	403
CHAPITRE 18. — <i>Théorie élémentaire des algèbres de Banach</i>	404
Introduction.....	404
Les éléments inversibles.....	405
Idéaux et homomorphismes.....	409
Applications.....	411
Exercices.....	415
Notes historiques.....	417
CHAPITRE 19. — <i>Transformées de Fourier holomorphes</i>	418
Introduction.....	418
Deux théorèmes de Paley et Wiener.....	419
Classes quasi-analytiques.....	422
Le théorème de Denjoy-Carleman.....	425
Exercices.....	428
Notes historiques.....	430
CHAPITRE 20. — <i>Approximation uniforme par des polynômes</i>	431
Introduction.....	431
Quelques lemmes.....	431
Théorème de Mergelyan.....	434
Exercices.....	437
Notes historiques.....	438

ANNEXE. — <i>Théorème de maximalité de Hausdorff</i>	439
BIBLIOGRAPHIE.....	441
LISTE DES SYMBOLES PARTICULIERS	446
INDEX	447